

# الدرس 11

## الأعداد المركبة (قسم ثان)

### 1 - الأعداد المركبة وحساب المثلثات

من أجل كل عدد حقيقي  $\theta$ ، ومن أجل كل عدد صحيح  $n$  لدينا  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$   
أي  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

**مبرهنة**

من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  لدينا :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (1)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (2)$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

**الإثبات**

$$(1) \text{ لدينا } e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$$

$$\sin(a+b) + i \cos(a+b) = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

بعد تفكيك الطرف الثاني من المساواة وتبسيطه فإنه يكتب على الشكل التالي:

$$(\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a)$$

إذن بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

$$(2) \text{ لدينا } e^{i(a-b)} = e^{ia} \times e^{-ib}$$

$$\text{أي } \cos(a-b) + i \sin(a-b) = (\cos a + i \sin a)(\cos(-b) + i \sin(-b))$$

بعد تفكيك وتبسيط الطرف الثاني فإنه يكتب بالصيغة الآتية :

$$\text{وبالمطابقة نجد : } (\cos a \cos b + \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b - \sin b \cos a)$$

$$\begin{cases} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{cases}$$

**نتائج**

$$(1) \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$(2) \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$(3) \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$(4) \sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$(5) \cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p, \sin 2p = 2 \sin p \cos p$$

**تمرين تدريبي**

(1) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$  ..... (1)

(2) بين أن المثلث  $ABC$  متقايس الساقين رأسه  $A$  إذا وفقط إذا كان :

$$2 \sin \hat{B} \cos \hat{C} = \sin \hat{A}$$

**✓ الحل**

$$(1) \cos 3x - \cos 5x = -2 \sin(4x) \sin(-x) = 2 \sin 4x \sin x$$

$$\sin 6x + \sin 2x = 2 \sin(4x) \cos x$$

$$\text{إذن المعادلة (1) تكتب على الشكل } 2 \sin 4x \sin x = 2 \sin(4x) \cos x$$

$$\text{بالقسمة على 2 نجد } \sin 4x \sin x = \sin 4x \cos x$$

$$\text{ومنه ينتج : } (\sin 4x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\text{وهذا يعني } \sin 4x = 0 \text{ أو } \sin x = \cos x$$

$$\sin 4x = 0 \text{ يكافئ } 4x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ يكافئ } x = \frac{k\pi}{4}$$

$$\sin x = \cos x \text{ يكافئ } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الأعداد الحقيقية من الشكل :

$$\frac{k\pi}{4} \text{ و } \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$



$M$  نقطة من  $(C)$  إذا فقط إذا كانت إحداثيات  $\omega M$  هي  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

لاحقة الشعاع  $\omega M$  هي  $r e^{i\theta}$  هي  $r \cos \theta + i r \sin \theta$

لكن  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\omega} + \overrightarrow{\omega M}$  ومنه ينتج  $Z = Z_0 + r e^{i\theta}$

### مثال - ♦

الدائرة التي مركزها  $\omega(1, 2)$  ونصف قطرها 2 معادلته الوسيطة هي:

$$Z - 1 + 2i + 2e^{i\theta}$$

## 2 - 2 نصف المستقيم - المستقيم

- ليكن  $\theta$  عدد حقيقي ثابت و  $Z_0$  عدد مركب صورته النقطة الثابتة  $A_0$ .

مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  مع  $Z \neq Z_0$

بحيث  $\arg(Z - Z_0) = \theta$  هو نصف المستقيم المفتوح

الذي مبدؤه  $A_0$  والموجه بالشعاع  $\vec{w}$

بحيث  $\theta = (\vec{u}, \vec{w})$  وترمز له ب  $[A_0, \theta)$

### خاصية

العادلة الوسيطة لنصف المستقيم الذي مبدؤه  $A_0$  ذات اللاحقة  $Z_0$  وشعاع توجيهه  $\vec{w}$  حيث:

$\theta = (\vec{u}, \vec{w})$  هي  $Z = Z_0 + r e^{i\theta}$  مع  $r$  يمسح  $[0, +\infty[$  و  $\theta$  عدد حقيقي ثابت.

### الإنبات

لتكن  $M$  نقطة كيفية من نصف المستقيم  $(\Delta)$  الذي مبدؤه  $A_0$  وشعاع توجيهه  $\vec{w}$

إذن  $\overrightarrow{A_0 M} = k \vec{w}$  مع  $k \geq 0$

السواة  $\overrightarrow{A_0 M} = k \vec{w}$  تكتب  $Z - Z_0 = k \times k_1 e^{i\theta}$

حيث  $\theta = \arg(Z - Z_0)$  و  $\|Z - Z_0\| = k_1$

بوضع  $k k_1 = r$  نجد  $Z - Z_0 = r e^{i\theta}$  وهو المطلوب.

### محور قطعة مستقيمة

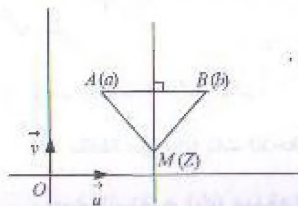
$A$  و  $B$  نقطتان لاحتاهما على الترتيب  $a$  و  $b$  مع  $a \neq b$ .

مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z$

بحيث  $|Z - a| = |Z - b|$

هي محور القطعة المستقيمة  $[AB]$

لأن  $|Z - a| = |Z - b|$  تعني أن  $AM = BM$



(2) - نفرض أن  $ABC$  متقايس الساقين يعني أن  $\hat{B} = \hat{C}$

لجنا  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$  ومنه  $\hat{A} = \pi - (\hat{B} + \hat{C})$

$$\sin \hat{A} = \sin(\pi - (\hat{B} + \hat{C})) = \sin(\hat{B} + \hat{C})$$

$$= \sin \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cos \hat{B} = 2 \sin \hat{B} \cos \hat{C}$$

- عكسيا نفرض أن  $\sin \hat{A} = 2 \sin \hat{B} \cos \hat{C}$  ..... (\*)

ونبين أن  $\hat{C} = \hat{B}$

$$\sin \hat{A} = \sin(\pi - (\hat{B} + \hat{C})) = \sin(\hat{B} + \hat{C}) = \sin \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cos \hat{B}$$

$$2 \sin \hat{B} \cos \hat{C} = \sin \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cos \hat{B}$$

بالتبسيط نجد  $\sin \hat{B} \cos \hat{C} = \sin \hat{C} \cos \hat{B}$

$$\sin(\hat{B} - \hat{C}) = 0 \quad \text{أي} \quad \sin \hat{B} \cos \hat{C} - \sin \hat{C} \cos \hat{B} = 0$$

ومنه نجد  $\hat{B} - \hat{C} = 0$  أي  $\hat{B} = \hat{C}$

## 2 - الأعداد المركبة والأشكال الهندسية

استعمال الأعداد المركبة لمعالجة مشكل في الهندسة يضطرنا للعمل في معلم متعامد ومتجانس مباشر وذلك لحساب الطويلة والعمدة.

### 1 - 2 الدائرة

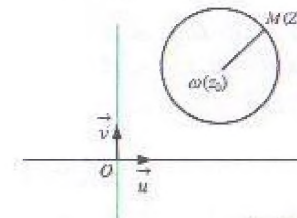
#### تعريف

$r$  عدد حقيقي موجب تماما و  $\omega$  نقطة ثابتة

من المستوى لاحتها  $Z_0$ .

مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z$

بحيث  $|Z - Z_0| = r$  هي الدائرة التي مركزها  $\omega$  ونصف قطرها  $r$ .



#### خاصية

العادلة الوسيطة للدائرة التي مركزها  $\omega$  ذات اللاحقة  $Z_0$  ونصف قطرها  $r$  هي:

$$Z = Z_0 + r e^{i\theta}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases}$$

#### الإنبات

ليكن  $\theta$  قياسا للزاوية  $(\vec{u}, \overrightarrow{\omega M})$  حيث  $M$  نقطة كيفية من الدائرة  $(C)$



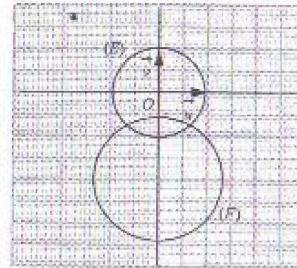
تمرين تدريبي 1

$M$  نقطة لاحقتها  $Z = e^{i\theta}$  مع  $\theta$  عدد حقيقي كافي.  
نرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $Z \neq 0$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $Z'$  حيث:

$$Z' = \frac{1+i}{Z} - 2i$$

- 1- ما هي مجموعة النقط  $M$  لا تسمح  $\theta$  تمسح  $\mathbb{R}$  ؟
- 2- عبر عن  $Z'$  بدلالة  $\theta$  واستنتج طبيعة  $F$  مجموعة النقط  $M'$ ، ثم ارسم  $E$  و  $F$ .

الحل ✓



$$Z_0 = 0 \text{ حيث } Z = Z_0 + 1 \times e^{i\theta} \quad 1$$

بما أن  $O$  تمسح  $\mathbb{R}$  فإن  $M$  تمسح دائرة مركزها  $O$  ونصف قطرها  $r=1$ .

$$1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ إذن:} \quad 2$$

$$Z' = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\theta}} - 2i = -2i + \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4}-\theta)}$$

(ب) مجموعة النقط  $M'$  لا تسمح  $\theta$  تمسح  $\mathbb{R}$  هي دائرة مركزها  $A$  ذات اللاحقة  $-2i$  ونصف قطرها  $\sqrt{2}$ .

تمرين تدريبي 2

(1) عبر بدلالة العمدة عن مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  لكل من نصفي المستقيمين المفتوحين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  الموضحين في الشكل المجاور.

(2) في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  التي تحقق الشرط العطي:

$$\arg(Z+i) = \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$\arg(Z-i) = \pi \quad (ب)$$

الحل ✓

$$(1) \text{ نصف المستقيم } (d_1) \text{ مبدؤه } A \text{ ذات اللاحقة } a=2-i$$

$$M \text{ نقطة من } (d_1) \text{ ذات اللاحقة } Z \text{ يعني } \left( \vec{u}, \vec{AM} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ أي } \arg(Z-a) = \frac{\pi}{2}$$

- نصف المستقيم  $(d_2)$  مبدؤه النقطة  $B$  ذات اللاحقة  $b = -1-i$

$$M \text{ نقطة من } (d_2) \text{ ذات اللاحقة } Z \text{ يعني } \left( \vec{u}, \vec{BM} \right) = \frac{3\pi}{4} \text{ أي } \arg(Z-b) = \frac{3\pi}{4}$$

$$(2) \text{ لدينا } \arg(Z+i) = \arg(Z-(-i))$$

لتكن  $A$  نقطة ذات اللاحقة  $-i$  و  $M$  نقطة ذات اللاحقة  $Z$

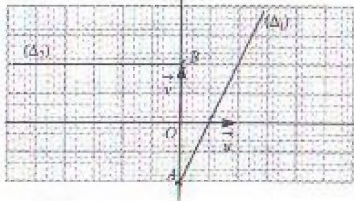
$$\text{إذن } \arg(Z+i) = \frac{\pi}{3} \text{ يكافئ } \left( \vec{u}, \vec{AM} \right) = \frac{\pi}{3}$$

ومنه مجموعة النقط  $M$  هي نصف المستقيم المفتوح  $(\Delta_1)$  الذي مبدؤه  $A$ .

(ب) لتكن  $B$  نقطة ذات اللاحقة  $i$  و  $M$  نقطة ذات اللاحقة  $Z$ .

$$\arg(Z-i) = \pi \text{ يكافئ } \left( \vec{u}, \vec{BM} \right) = \pi$$

ومنه مجموعة النقط هي نصف المستقيم  $(\Delta_2)$  المفتوح ومبدؤه  $B$ .



3- الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

مثال -

نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على  $\mathbb{C}$  بـ  $f(z) = iz$  و  $g(z) = \frac{1}{2}z$

(1) احسب  $f(1)$  و  $(g \circ f)(1)$  ،  $f(g(1))$  ،  $(f \circ g)(1)$  ،  $g(f(1))$  ،  $(g \circ f)(1)$  ،  $f(g(1))$  ،  $(f \circ g)(1)$  ،  $g(f(1))$

وعلم النقط الموافقة لهذه القيم في العلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

(2) نعتبر النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  و  $N, P, Q$  ، النقط ذات اللواحق:

$$f(z), g(z), f(g(z)), g(f(z)), f(g(f(z))), g(f(g(z)))$$

(أ) عين بدلالة  $z$  لواحق كل من هذه النقط.

(ب) باستعمال النقط  $O, M, N$  فسر هندسيا المساواة  $f(z) = iz$  مستنتجا

طبيعة التحويل  $r$  من المستوي بحيث  $r(M) = N$  ،  $r(P) = Q$  ،

(ج) ما هو التحويل  $H$  من المستوي بحيث  $H(N) = P$  ،  $H(Q) = R$  ،

(3) نضع  $z = a + ib$  مع  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين.

عين إحداثيات النقط  $M, N, P, Q, R$  بدلالة  $a$  و  $b$ .

الحل ✓

$$(1) f(1) = i, (g \circ f)(1) = \frac{i}{2}, f(g(1)) = \frac{i}{2}, (f \circ g)(1) = \frac{i}{2}, g(f(1)) = \frac{i}{2}, (g \circ f)(1) = \frac{i}{2}, f(g(1)) = \frac{i}{2}, g(f(1)) = \frac{i}{2}$$



### 3-2 الكتابة المركبة للانسحاب

مبرهنة

الكتابة المركبة للرفقة للانسحاب  $t$  الذي شعاعه  $\vec{w}$  هي  $Z' = Z + b$  حيث  $b$  لاحقة  $\vec{w}$ .

الإنبات

من أجل كل نقطة  $M(Z)$  النقطة  $M'$  صورة  $M$  بـ  $t$  يعني  $t(M) = M'$  و  $\vec{MM'} = \vec{w}$  أي  $Z' - Z = b$  ومنه نجد  $Z' = Z + b$

خاصية

$M'$  و  $N'$  صورتي  $M$  و  $N$  على الترتيب بالانسحاب  $t$ ، يكافئ  $\vec{MN} = \vec{M'N'}$

الإنبات

(1) ..... يعني  $Z_{N'} = Z_N + b$   $t(N) = N'$

(2) ..... يعني  $Z_{M'} = Z_M + b$   $t(M) = M'$

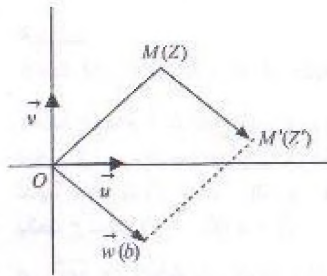
حيث  $\vec{w}$  صورة العدد المركب  $b$

ب طرح (1) من (2) نجد  $Z_{M'} - Z_{N'} = Z_M - Z_N$

وهذا يعني أن  $\vec{N'M'} = \vec{NM}$

مثال -

الكتابة المركبة للانسحاب الذي شعاعه  $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  هي  $Z' = Z + 1 + 2i$



تمرين تدريبي

معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نقطتان لاحقتاهما  $1+2i$  و  $3+5i$  على الترتيب

عين الانسحاب الذي يحول A إلى B.

✓ الحل :

$b = Z_B - Z_A = 2 + 3i$  ومته  $Z_B = Z_A + b$

ومنه فإن الكتابة المركبة للانسحاب المطلوب هي  $Z' = Z + 2 + 3i$

### 3-3 الكتابة المركبة للتحاكي

مبرهنة

$k$  عدد حقيقي غير معدوم.

$$(fog)(1) = fog(f(1)) = (fog)(i) = f(g(i)) = f\left(\frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2}$$

$$gofogof(1) = gofogof(i) = gof\left(\frac{1}{2}i\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

نسمي  $D, C, B, A$  لواقع  $(gof)(1), f(1)$

و  $fogof(1)$  و  $gofogof(1)$  على الترتيب.

(1)  $M$  لاحقتها  $z$

$N$  لاحقتها  $f(z)$  أي  $iz$

$P$  لاحقتها  $gof(z)$

$$gof(z) = g(f(z)) = g(iz) = \frac{1}{2}iz$$

$$fogof(z) = fog(iz) = f\left(\frac{1}{2}iz\right) = -\frac{1}{2}z$$

$$gofogof(z) = g\left(-\frac{1}{2}z\right) = -\frac{1}{4}z$$

لدينا  $f(z) = iz$

$$\left(\vec{OM}, \vec{ON}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{ON}{OM} = 1 \text{ أي } \frac{f(z)}{z} = i$$

وهذا يعني أن  $N$  هي صورة  $M$  بدوران مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

- بمان  $Z_Q = iZ_P$  فإن  $Q$  هي صورة  $P$  بدوران مركزه النقطة  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

إذن التحويل  $r$  هو دوران مركزه النقطة  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

$$Z_P = \frac{1}{2}Z_N \text{ أي } Z_P = \frac{1}{2}iz \text{ و } Z_N = iz$$

$$Z_R = -\frac{1}{2}Z_Q \text{ أي } Z_R = -\frac{1}{4}z \text{ و } Z_Q = -\frac{1}{2}z$$

إذن التحويل الذي يحول  $N$  إلى  $P$  و  $Q$  إلى  $R$  هو تحاكي نسبته  $\frac{1}{2}$  ومركزه النقطة  $O$ .

$$(3) \quad R\left(-\frac{1}{4}a, -\frac{1}{4}b\right), Q\left(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b\right), P\left(-\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a\right), N(-b, a), M(a, b)$$

### 3-1 الكتابة المركبة لتحويل نقطي

ليكن  $F$  تحويل نقطي من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $Z$

النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $Z'$  بحيث  $F(M) = M'$

التطبيق  $f$  من  $\mathbb{C}$  الذي يرفق بكل عدد مركب  $Z$  العدد المركب  $Z'$  حيث  $f(Z) = Z'$

يسمى البالة المركبة الرفقة للتحويل  $F$ .

$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$	$P \rightarrow P$
$f: Z \mapsto Z'$	$F: M(Z) \mapsto M'(Z')$



الإثبات

ليكن  $h$  تحاكي مركزه النقطة  $\Omega$  ونسبته  $k$

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \quad \text{يكافئ} \quad h(M) = M'$$

$$\text{أي } Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$$

خاصية

إذا كانت  $M'$  و  $N'$  صورتي  $M$  و  $N$  على التوالي بالتحاكي الذي نسبته  $k$  فإن:

$$\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN} \quad \text{و} \quad |M'N'| = |k| |MN|$$

الإثبات

النقط  $M, N, M', N'$  لواقعها على التوالي  $Z_1, Z_2, Z_1', Z_2'$ .

لاحقة الشعاع  $\overrightarrow{MN}$  هي  $Z_2 - Z_1$  ولاحقة الشعاع  $\overrightarrow{M'N'}$  هي  $Z_2' - Z_1'$

ليكن  $k$  نسبة التحاكي و  $\Omega$  مركزه حيث  $\Omega$  ذات اللاحقة  $Z_0$ .

$$\text{لدينا } Z_1' - Z_0 = k(Z_1 - Z_0) \quad \text{و} \quad Z_2' - Z_0 = k(Z_2 - Z_0)$$

$$\text{بالطرح نجد } Z_2' - Z_1' = k(Z_2 - Z_1)$$

$$\text{أي } \overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$$

ملاحظة

التحاكي الذي مركزه  $\Omega$  ونسبته  $-1$  هو التناظر المركزي الذي مركزه  $\Omega$ .

تمرين تدريبي

1- انسحاب شعاعه  $\vec{w}(1+i)$  و  $h$  تحاكي مركزه  $\Omega(1-i)$  ونسبته  $-2$

(1) عين الكتابة المركبة المرفقة لـ  $i$  و  $h$ .

(2) عين الكتابة المركبة المرفقة لـ  $F=h \circ i$  ثم عين طبيعة  $F$ .

الحل

(1) الكتابة المركبة المرفقة لـ  $i$  هي  $Z' = Z + 1 + i$

الكتابة المركبة المرفقة لـ  $h$  هي  $Z' - (1-i) = -2(Z - (1-i))$

$$\text{أي } Z' - 1 + i = -2(Z - 1 + i)$$

(2)  $F(M) = M''$  ومنه  $h(M') = M''$  و  $i(M) = M'$

لدينا  $Z' = Z + 1 + i$  و  $Z'' - 1 + i = -2(Z' - 1 + i)$

$$\text{إذن } Z'' - 1 + i = -2[Z + 1 + i - 1 + i]$$

$$Z'' - 1 + i = -2(Z + 2i)$$

$$(1) \dots\dots\dots Z'' = -2Z + 1 - 5i$$

لاحظ أنه يمكن كتابة (1) على الشكل:

$$Z'' - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i\right) = -2\left(Z - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i\right)\right)$$

إذن  $h$  هو أيضا تحاكي مركزه النقطة  $B\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i\right)$  ونسبته  $-2$

(مركز التحاكي هي النقطة الصامدة  $M$  حيث  $F(M) = M$  أي  $Z' = Z$ )

3-4 الكتابة المركبة للدوران

مرهنة

$\Omega$  نقطة ذات اللاحقة  $Z_0$  و  $\theta$  عدد حقيقي.

- الكتابة المركبة المرفقة للدوران  $r$  الذي مركزه النقطة  $O$  وزاويته  $\theta$  هي  $Z' = e^{i\theta} Z$

- الكتابة المركبة المرفقة للدوران  $r$  الذي مركزه النقطة  $\Omega$  وزاويته  $\theta$  هي:

$$Z' - Z_0 = e^{i\theta} (Z - Z_0)$$

الإثبات

$r$  دوران مركزه النقطة  $\Omega$  وزاويته  $\theta$  و  $M$  نقطة من المستوي تختلف عن  $\Omega$

و  $M'$  صورة  $M$  بهذا الدوران.

$$r(M) = M' \quad \text{تكافئ} \quad (M = M') \quad \text{أو} \quad \Omega M = \Omega M' \quad \text{و} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$$

- من أجل  $M$  تختلف عن  $\Omega$  لدينا:

$$\left| \frac{Z' - Z_0}{Z - Z_0} \right| = 1 \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{Z' - Z_0}{Z - Z_0}\right) = \theta + 2k\pi$$

$$\text{وهذا يعني أن } \frac{Z' - Z_0}{Z - Z_0} = e^{i\theta}$$

$$\text{أي } Z' - Z_0 = e^{i\theta} (Z - Z_0) \quad (*)$$

- من أجل  $M$  منطبقة على  $\Omega$  العلاقة (\*) تبقى صحيحة.

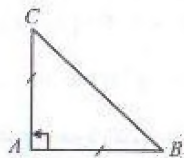
حالة خاصة

$a, b, c$ : لواقع النقط  $A, B, C$  على الترتيب.

•  $ABC$  مثلث قائم في  $A$  ومتساوي الساقين.

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{مباشرا أي}$$

فإن الدوران  $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$  الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  يحول النقطة  $B$  إلى  $C$





خلاصة

$F$  تحويل نقطي من المستوي الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $Z'$  حيث :

$$Z' = aZ + b \quad \text{مع } a \neq 0 \text{ و } b \text{ عدنان مركبان}$$

- إذا كان  $a=1$  فإن  $F$  انسحاب شعاعه  $\vec{u}$  ذو اللاحقة  $b$

- إذا كان  $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$  فإن  $F$  تحاكي نسبته  $a$  ومركزه النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة  $Z_0 = \frac{b}{1-a}$

- إذا كان  $a$  عددا مركبا وليس حقيقيا و  $|a|=1$  فإن  $F$  دوران زاويته  $\arg(a)$

ومركزه النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة  $Z_0 = \frac{b}{1-a}$

تمرين تدريبي 1

$r$  دوران مركزه النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة  $3i$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  و  $r'$  دوران مركزه

النقطة  $O$  مبدا المعلم وزاويته  $\frac{\pi}{3}$

(1) عين الكتابة المركبة لـ  $r \circ r'$

(2) استنتج طبيعة التحويل  $r' \circ r$

الحل :

$$M(Z) \xrightarrow{r} M'(Z') \xrightarrow{r'} M''(Z'') \quad (1)$$

الكتابة المركبة للدوران  $r$  هي  $Z' - 3i = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z - 3i)$  أي  $Z' = iZ + 3i + 3$

الكتابة المركبة للدوران  $r'$  هي  $Z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z'$  أي  $Z'' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z'$

$$Z'' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(iZ + 3i + 3)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)$$

وهي الكتابة المركبة لـ  $r' \circ r$

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{حيث } Z'' = aZ + b \quad (2)$$

و  $|a|=1$  و  $b = \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)$  فإن  $r' \circ r$  دوران زاويته  $\arg(a) = 5\frac{\pi}{6}$

ومركزه النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة  $Z_0 = \frac{b}{1-a}$

$$\text{إذن } Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_A)$$

وهذه العلاقة تكتب  $c - a = i(b - a)$

- إذا كان اتجاه  $ABC$  غير مباشر أي  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{2}$

فإن الدوران  $r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$  يحول النقطة  $B$  إلى  $C$  وب نفس الكيفية السابقة نجد :

$$c - a = -i(b - a) \quad \text{أي } Z_C - Z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_A)$$

•  $ABC$  مثلث متقايس الأضلاع

- إذا كان اتجاه  $ABC$  مباشرا أي  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$

فإن الدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  يحول  $B$  إلى  $C$

$$\text{إذن } c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$$

- إذا كان اتجاه  $ABC$  غير مباشر أي  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{3}$

فإن الدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $-\frac{\pi}{3}$  يحول  $B$  إلى  $C$

$$\text{إذن } c - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - a)$$

خاصية

- إذا كانت النقطتان  $M'$  و  $N'$  صورتين النقطتين المختلفتين  $M$  و  $N$  على الترتيب بالدوران

الذي زاويته  $\theta$  فإن  $MN = M'N'$  و  $(\vec{MN}, \vec{M'N'}) = \theta + 2k\pi$  مع  $k \in \mathbb{Z}$

الإثبات

ليكن  $Z_0$  لاحقة مركز الدوران.

$$MN = |Z_N - Z_M| \quad \text{و} \quad M'N' = |Z_{N'} - Z_{M'}|$$

$$\text{لكن } Z_{M'} - Z_0 = e^{i\theta}(Z_M - Z_0) \quad \text{و} \quad Z_{N'} - Z_0 = e^{i\theta}(Z_N - Z_0)$$

بطرح طرفي هاتين المساويتين نجد :

$$Z_{N'} - Z_{M'} = e^{i\theta}(Z_N - Z_M)$$

$$|Z_{N'} - Z_{M'}| = |Z_N - Z_M| \quad \text{و} \quad \arg(Z_{N'} - Z_{M'}) = \arg(Z_N - Z_M) + \theta + 2k\pi$$

$$\text{أي } M'N' = MN \quad \text{و} \quad (\vec{u}, \vec{M'N'}) = \theta + (\vec{u}, \vec{MN}) + 2k\pi$$

وهذه الأخيرة تكتب :

$$(\vec{MN}, \vec{M'N'}) = \theta + 2k\pi \quad \text{و} \quad M'N' = MN$$



تمرين تدريبي 2

في المستوى الموجه نعتبر الثلاثين  $ABC$  و  $ADE$  القائمين في  $A$  ومتساويي الساقين

$$\left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = \left( \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \right) = \frac{\pi}{2}$$

بين أن  $BD = CE$  وأن المستقيمين  $(BD)$  و  $(CE)$  متعامدان.

(1) باستعمال طرق هندسية.

(2) باستعمال الأعداد المركبة.

الحل:

(1) بالدوران  $r$  الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ ، صورة النقطة  $B$  هي  $C$ ، وصورة النقطة  $D$  هي  $E$  ومنه:

$$\left( \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ و } BD = CE$$

و  $(CE)$  صورة  $(BD)$  بالدوران  $r$ .

$$\left( \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ المساواة}$$

تعني أن المستقيمين  $(BD)$  و  $(CE)$  متعامدان.

(2) نرمز بـ  $e, d, c, b$  إلى لواحق النقط  $E, D, C, B$  في معلم متعامد ومتجانس مباشر مركزه النقطة  $A$ .

$$r(D) = E \text{ و } r(B) = C$$

إذن  $e = id$  و  $c = ib$  بالطرح نجد:

$$\frac{e-c}{d-b} = i \text{ نجد } d-b \text{ وبالقسمة على } d-b$$

$$\text{بما أن } \left| \frac{e-c}{d-b} \right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{e-c}{d-b}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

$$\left( \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ و } BD = CE$$

إذن  $BD = CE$  و  $(BD)$  يعامد  $(CE)$ .

تطبيق 1



في الشكل المجاور مستطيل  $ABCD$  مستطيل

$CBE$  و  $DCF$  مثلثين متقايسين

$$\left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ والضلع}$$

$$\left( \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE} \right) = \left( \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DF} \right) = \frac{\pi}{3} \text{ و}$$

نفرض أن  $AB = 3$  و  $AD = 1$

(1) اختر معلما متعامدا ومتجانسا  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  مباشر يطلب تحديده، ثم عين لواحق النقط  $F, E, D, C, B, A$  في هذا العلم.

(2) باستعمال السؤال (1) بين أن المثلث  $AEF$  متقايس الأضلاع في الاتجاه المباشر.

الحل:

(1) نختار العلم  $(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

$$\text{بما أن } \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ و } \left\| \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \right\| = \left\| \overrightarrow{AD} \right\| = 1$$

فإن  $(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  معلم متعامد ومتجانس مباشر.

لتكن  $Z_A, Z_B, Z_C, Z_D, Z_E, Z_F$  لواحق  $A, B, C, D, E, F$  على الترتيب.

$$Z_D = i, Z_C = 3+i, Z_B = 3, Z_A = 0.$$

- بما أن المثلث  $ECB$  متقايس الأضلاع فإن  $Z_E - Z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_C - Z_B)$

$$\text{بالتبسيط نجد } Z_E = \frac{Z_B - e^{i\frac{\pi}{3}}Z_C}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}} = \left( 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2}i$$

- بما أن  $DCF$  متقايس الأضلاع فإن  $Z_C - Z_F = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_D - Z_F)$

$$\text{بالتبسيط نجد } Z_F = \frac{Z_C - e^{i\frac{\pi}{3}}Z_D}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{3}{2} + \left( 1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2} \right)i$$

(2) لإثبات أن المثلث  $AEF$  متقايس الأضلاع في الاتجاه المباشر يكفي أن نبين أن:



$$(Z_F - Z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}} (Z_E - Z_A)$$

$$Z_F - Z_A = \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - 0 = \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$Z_E - Z_A = Z_E$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} Z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}i\right]$$

$$= \left(\frac{6 + \sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + i\left[\frac{1}{4} + \frac{6 + \sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

إذن  $AEF$  مثلث متقايس الأضلاع في الاتجاه المباشر.

## تطبيق 2

إثبات التعامد والاستقامة

$C, B, A$  ثلاث نقاط مختلفة فيما بينها لواحقها على التوالي  $a, b, c$

(1) ما هي الخاصية التي تحققها عمدة العدد  $\frac{b-a}{c-a}$  لكي :

- النقط  $C, B, A$  على استقامة واحدة.

- المستقيمان  $(AB)$  و  $(AC)$  متعامدان.

(2) بين أن  $(CA)$  و  $(CB)$  متعامدان إذا علمت أن :

$$c = 2 - i\sqrt{3} \text{ و } b = -1 - 2i\sqrt{3} \text{ و } a = -1 + 2\sqrt{3}i$$

الحل ✓

$$(1) \text{ لدينا } \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}\right) = \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$$

- النقط  $C, B, A$  على استقامة واحدة تعني أن :

$$\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}\right) = \pi \text{ أو } \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}\right) = 0$$

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \pi \text{ أو } \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = 0$$

ومنه نستنتج أن  $\frac{b-a}{c-a}$  حقيقي.

- المستقيمان  $(AB)$  و  $(AC)$  متعامدان يعني :

$$\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ أو } \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ أو } \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

وهذا يعني أيضا أن  $\frac{b-a}{c-a}$  تخيلي صرف.

$$\frac{b-a}{a-c} = \frac{-1 - 2\sqrt{3}i - 2 + i\sqrt{3}}{-1 + 2\sqrt{3}i - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{-3 + 3\sqrt{3}i} \times \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{-3 - 3\sqrt{3}i} \quad (2)$$

$$= \frac{9 - 9 + 9\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i}{36} = \frac{12\sqrt{3}i}{36} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

بما أن  $\frac{b-a}{a-c}$  تخيلي صرف فإن المستقيمين  $(CA)$  و  $(CB)$  متعامدان.

## تطبيق 3

تعيين طبيعة مثلث

$A$  و  $B$  نقطتان لاحتقناهما على التوالي  $(1 + i\sqrt{3}) \times 3$  و  $(1 - i\sqrt{3}) \times 3$

بين أن النقطتين  $A$  و  $B$  تنتميان إلى نفس الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 6.

(2) عين لاحقة النقطة  $C$  بحيث النقطة  $O$  هي مركز ثقل المثلث  $ABC$ .

(3) ما هي طبيعة المثلث  $ABC$  ؟

الحل ✓

$$(1) \text{ لدينا } |Z_A| = 6 \text{ و } |Z_B| = 6 \text{ ومنه } |Z_A| = |Z_B| = 6$$

وهذا يعني أن النقطتين  $A$  و  $B$  تنتميان إلى نفس الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 6.

$$(2) \text{ } O \text{ مركز ثقل المثلث } ABC \text{ يعني } Z_O = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

$$\text{ومنه } Z_C = -Z_A - Z_B = -6$$

بما أن  $|Z_C| = 6$  فإن  $C$  تنتمي إلى الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 6.

- بما أن مركز ثقل المثلث  $ABC$  منطبق على مركز الدائرة التي تشمل الرؤوس  $A, B, C$  فإن المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع (المتوسط يصبح محورا).

## تطبيق 4

المستقيمات الخاصة في مثلث

$A, B, C, D$  أربع نقاط لواحقها على التوالي :

$$d = -3 - 2i, c = 5 + 2i, b = 7i, a = 3 - 2i$$

(1) نقطة لاحتقها  $\Omega$  2i.

بين أن النقط  $A, B, C, D$  تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها  $\Omega$

ونصف قطرها 5.



### الحل

$$\begin{aligned} (1) \quad Z' &= Z + 1 - 2i = 1 + 2i + 1 - 2i = 2 \\ (2) \quad Z' &= 2Z = 2(1 + 2i) = 2 + 4i \\ (3) \quad Z' - (1 + 3i) &= e^{i\frac{\pi}{3}} (Z - 1 - 3i) = e^{i\frac{\pi}{3}} (-i) \\ Z' &= 1 + 3i - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{5}{2}\right) \\ (4) \quad \text{التناظر المركزي الذي مركزه } B \text{ هو تحاكي مركزه } B \text{ ونسبته } -1 \\ Z' - (1 - 2i) &= -(Z - 1 + 2i) \\ Z' &= 1 - 2i - 1 + 2i + 1 - 2i = 1 - 6i \\ (5) \quad Z' &= \bar{Z} = (1 + 2i) = 1 - 2i \end{aligned}$$

### تطبيق 6 التعرف على طبيعة تحويل نقلي

$a$  و  $b$  لاحقاً النقطتين  $A$  و  $B$  على الزتیب مرتبطتان بالعلاقة المعطاة. ما هو التحويل الذي يحول  $A$  إلى  $B$  في كل حالة من الحالات التالية:

- $b - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(a - i)$  (ج) ،  $b = -2a$  (ب) ،  $b = a + 2 - 3i$  (ا)
- $b + 2 + i = e^{i\frac{\pi}{6}}(a + 2 + i)$  (د) ،  $b = -\bar{a}$  (هـ)

### الحل

- التحويل الذي يحول  $A$  إلى  $B$  هو انسحاب شعاعه  $\vec{w}(2, -3)$
- التحويل الذي يحول  $A$  إلى  $B$  هو تحاكي نسبته  $-2$  ومركزه النقطة  $O$
- التحويل الذي يحول  $A$  إلى  $B$  هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة  $i$  وزاويته  $\frac{\pi}{4}$
- التحويل الذي يحول  $A$  إلى  $B$  هو التناظر المحوري الذي محوره المستقيم  $(y)$
- التحويل الذي يحول  $A$  إلى  $B$  هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة  $-i - 2$  وزاويته  $\frac{\pi}{6}$

### تطبيق 7 تعيين طبيعة تحويل وعناصره الأساسية

$C, B, A$  ثلاث نقاط لواحقتها على التوالي:  
 $c = -2 - 4i$  ،  $b = -6 + 4i$  ،  $a = 6$

(2)  $E$  منتصف  $[AB]$  لاحقاً  $e$ .

(ا) احسب  $e$  ثم بين أن  $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$   
 (ب) ما هي طبيعة المستقيم  $(EA)$  في المثلث  $DEC$  ؟

### الحل

(1) لدينا  $|d - 2i| = 5$  و  $|c - 2i| = 5$  و  $|a - 2i| = 5$  و  $|b - 2i| = |5i| = 5$   
 ومنه النقط  $A, B, C, D$  تقع على دائرة مركزها  $\Omega$  ونصف قطرها  $5$ .

(2) لدينا  $e = \frac{a+b}{2} = \frac{3+5i}{2}$

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}{-3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}i} = \frac{1-3i}{-3-3i} = \frac{1+2i}{3+3i}$$

$$\frac{c-e}{a-e} = \frac{5+2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}{3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i} = \frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i} = \frac{5-i}{3-9i} = \frac{1+2i}{3+3i}$$

ومنه  $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

(ب) لدينا  $\arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = (\vec{EA}, \vec{EC})$  و  $\arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right) = (\vec{ED}, \vec{EA})$

ومنه ينتج  $(\vec{ED}, \vec{EA}) = (\vec{EA}, \vec{EC})$

وهذا يعني أن  $(EA)$  منصف للزاوية  $(\vec{ED}, \vec{EC})$

وعليه المستقيم  $(EA)$  منصف للزاوية  $(\vec{ED}, \vec{EC})$  في المثلث  $DEC$ .

### تطبيق 6 الكتابة المركبة والتحويل النقلي

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$   
 $M$  نقطة ذات اللاحقة  $Z = 1 + 2i$   
 عين  $Z'$  لاحقة النقطة  $M'$  صورة  $M$  بالتحويل العطي في كل حالة من الحالات التالية:

- الانسحاب الذي شعاعه  $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$
- التحاكي الذي مركزه النقطة  $O$  ونسبته  $2$
- الدوران الذي مركزه  $A(1, 3)$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$
- التناظر المركزي الذي مركزه النقطة  $B(1, -2)$
- التناظر المحوري الذي محوره  $(y)$



$$= \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) [(-1-\sqrt{3}) + i(-3-3\sqrt{3})]$$

$$= \left[ \frac{-1-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (-3-3\sqrt{3}) \right] + i \left[ \frac{-3-3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} (-1-\sqrt{3}) \right]$$

$$= \left[ \frac{-1-\sqrt{3}+3\sqrt{3}+9}{2} \right] + i \left[ \frac{-3-3\sqrt{3}-\sqrt{3}-3}{2} \right]$$

$$= [4+\sqrt{3}] + i [-3-2\sqrt{3}]$$

ومنه نستنتج أن  $r-p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$  ..... (\*\*)

من المساواة (\*) نستنتج أن  $R$  هي صورة  $Q$  بالدوران الذي مركزه  $P$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .  
إذن المثلث  $PQR$  متقايس الأضلاع.

## تطبيق 8

صورة مربع بتحاكي

$C, B, A$  و  $D$  أربع نقاط لواحقها.

الترتيب  $d=6i, c=3+6i, b=3+3i, a=3i$  على

(1) بين أن الرباعي  $ABCD$  مربع.

(2) بالتحاكي الذي مركزه  $O$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  عين لواحق النقاط

$D', C', B', A'$  صور  $D, C, B, A$  على التوالي بهذا التحويل.

(3) تحقق أن الرباعي  $A'B'C'D'$  مربع.

## الحل

(1) بما أن  $a-b=-3, c-b=3i$  فإن  $c-b=-i(a-b)$

وبالتالي  $\frac{c-b}{a-b} = -i$

إذن  $\arg \left( \frac{c-b}{a-b} \right) = -\frac{\pi}{2}$  و  $\left| \frac{c-b}{a-b} \right| = 1$

وهذا يعني أن  $BC=BA$  و  $(\vec{BA}, \vec{BC}) = -\frac{\pi}{2}$

إذن المثلث  $ABC$  متقايس الساقين وقائم في  $B$  ..... (1)

بما أن  $c-b=d-a$  فإن  $d-a=6i-3i=3i$

وهذا يعني أن  $\vec{AD}=\vec{BC}$  ..... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي  $ABCD$  مربع.

(2) لكن  $d', c', b', a'$  لواحق  $D', C', B', A'$  على التوالي.

(1) تحقق أن  $b-c=i(a-c)$

(ب) استنتج أن المثلث  $ABC$  قائم ومتساوي الساقين.

(2) نرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحة  $Z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحة  $Z'$  بحيث

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{3}} Z$$

(أ) ما هي طبيعة هذا التحويل؟

(ب) احسب  $a', b', c'$  لواحق النقاط  $A', B', C'$  صور  $A, B, C$  بهذا التحويل.

(3)  $R, Q, P$  منتصفات القطع  $[A'C], [B'C], [AB]$  لواحقها هي

$r, q, p$  على الترتيب.

(أ) احسب  $r, q, p$

(ب) تحقق أن  $r-p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$  واستنتج أن المثلث  $PQR$  متقايس الأضلاع.

## الحل

(1) لدينا  $b-c = (-6+4i) - (-2-4i) = -4+8i$

$$i(a-c) = i(6+2+4i) = i(8+4i) = -4+8i$$

ومنه  $b-c=i(a-c)$  ..... (\*)

(ب) من العلاقة (\*) نستنتج أن  $B$  هي صورة  $A$  بالدوران الذي مركزه  $C$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

إذن  $CA=CB$  و  $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2}$

وبالتالي المثلث  $ABC$  قائم في  $C$  ومتساوي الساقين.

(2) طبيعة التحويل هو دوران مركزه النقطة  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

(ب)  $d' = e^{i\frac{\pi}{3}} d = 6 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3+3\sqrt{3}i$

$$b' = e^{i\frac{\pi}{3}} b = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (-6+4i) = (-3-2\sqrt{3}) + i(2-3\sqrt{3})$$

$$c' = e^{i\frac{\pi}{3}} c = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (-2-4i) = (-1+2\sqrt{3}) + i(-2-\sqrt{3})$$

$$p = \frac{d'+b}{2} = \frac{3+3\sqrt{3}i+4i-6}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}+4}{2}i \quad (1)$$

$$q = \frac{b'+c}{2} = \frac{(-3-2\sqrt{3})+i(2-3\sqrt{3})-2-4i}{2} = \frac{-5-2\sqrt{3}}{2} + i \frac{(-2-3\sqrt{3})}{2}$$

$$r = \frac{c'+a}{2} = \frac{(-1+2\sqrt{3})+i(-2-\sqrt{3})+6}{2} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2} + i \frac{(-2-\sqrt{3})}{2}$$

$$r-p = \frac{8+2\sqrt{3}}{2} + i \frac{(-2-\sqrt{3}-3\sqrt{3}-4)}{2} = (4+\sqrt{3}) + i(-3-2\sqrt{3}) \quad (ب)$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p) = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \left( \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} \right) + i \left( \frac{-2-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}-4}{2} \right)$$



$$Z_D = Z_A + e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_C - Z_A) = Z_A + iZ_C - iZ_A$$

$$Z_D = (1-i)Z_A + iZ_C = (1-i)(\sqrt{2}-i\sqrt{2}) + i(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{2}-\sqrt{2}) + i(-\sqrt{2}-\sqrt{2}) - i\sqrt{2} + \sqrt{2} = -3\sqrt{2}i + \sqrt{2}$$

(3) لدينا  $Z_C - Z_B = -2\sqrt{2}i$  و  $Z_D - Z_A = -2\sqrt{2}i$

$$AD = BC \text{ و } \vec{AD} = \vec{BC}$$

$$\text{ولدينا } (\vec{AB}, \vec{AD}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 3\frac{\pi}{4}$$

إذن نستنتج مما سبق أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

### تطبيق 10

صور نقط بتحاكي ودوران وتعيين طبيعة رباعي

C, B, A ثلاث نقاط نلاحظها على التوالي:

$$c = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1) عين d لاحقة D صورة C بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته -3.

(2) عين e لاحقة E صورة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$ .

$$(1.3) \text{ احسب } Z = \frac{d-b}{e-b}$$

(ب) I منتصف [DE] ونظرة B بالنسبة إلى I، بين أن BDFE مربع.

الحل

$$(1) \text{ لدينا } Z_D - Z_A = -3(Z_C - Z_A)$$

$$d = Z_D = -3Z_C + 4Z_A = -3\left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 2\sqrt{2}$$

$$d = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i + 2\sqrt{2} = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

$$(2) e = Z_E = e^{-i\frac{\pi}{2}}Z_C = -iZ_C = -i(\sqrt{2}-i\sqrt{2}) = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

$$Z = \frac{d-b}{e-b} = \frac{-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \quad (1.3)$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(-1+i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\text{ومنه نستنتج أن } BE = BD \text{ و } (\vec{BE}, \vec{BD}) = -\frac{\pi}{2}$$

(ب) بما أن F نظرة B بالنسبة إلى I و E نظرة D بالنسبة إلى I فإن BD = EF (التناظر تقايس) إذن BDEF مربع.

$$c = -\frac{1}{2}e = -\frac{3}{2}-3i \text{ و } d = -\frac{1}{2}a = -\frac{3}{2}i$$

$$d' = -\frac{1}{2}d = 3i \text{ و } b' = -\frac{1}{2}b = -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$\frac{c-b'}{d'-b'} = -i \text{ فإن } c-b' = -i(d'-b')$$

$$\vec{AD} = \vec{BC} \text{ و } \arg\left(\frac{c-b'}{d'-b'}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ و } \left|\frac{c-b'}{d'-b'}\right| = 1$$

وهذا يعني أن الرباعي ABCD مربع.

الكتابة الأسية لعدد مركب - صور نقط بدوران

### تطبيق 9

(1) لتكن A نقطة لاحقتها  $Z_A = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$  و B لاحقتها  $Z_B = -Z_A$

اكتب  $Z_B$  و  $Z_A$  على الشكل الأسّي، ثم علم النقطتين A و B.

(2) C هي صورة B بالدوران الذي مركزه O وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

و D هي صورة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

(ا) علم النقطتين C و D، ثم اكتب لاحقة C على الشكل الجبري.

(ب) عر عن  $Z_D$  لاحقة D بدلالة  $Z_A$  و  $Z_C$ ، ثم بين أن  $Z_D = \sqrt{2}-i3\sqrt{2}$

(3) ما هي طبيعة الرباعي ABCD ؟

الحل

$$(1) \text{ لدينا } Z_A = \sqrt{2}-i\sqrt{2} \text{ و } Z_B = -Z_A$$

الكتابة الأسية لـ  $Z_A$  و  $Z_B$  هي:

$$Z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ و } Z_B = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

بما أن  $|Z_B| = |Z_A|$  فإن النقطتين A و B

تنتميان إلى نفس الدائرة التي مركزها O

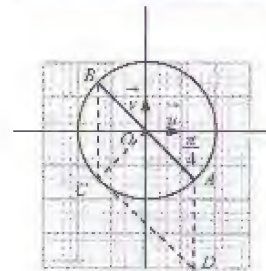
ونصف قطرها 2.

$$k \in \mathbb{Z}, \quad (\vec{u}, \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ و } (\vec{u}, \vec{OA}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\begin{cases} AC = AD \\ (\vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} OC = OB \\ (\vec{OB}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1.2)$$

بما أن C هي نظرة B بالنسبة إلى (OA) فإن  $Z_C - \bar{Z}_B = -\bar{Z}_A = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$

$$(ب) Z_D - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_C - Z_A)$$





## تطبيق 11

نجد صورة نقطة بدوران

$OABC$  متوازي أضلاع مركزه  $O$  يبقى ثابتا،  $M'$  و  $M$  نقطتان

بحيث  $AM = AB$  و  $CM' = CB$  و  $(\vec{AM}, \vec{AB}) = (\vec{CM'}, \vec{CB}) = \alpha$

نريد أن نبرهن أن النقطة  $M'$  هي صورة  $M$  بالدوران

الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\alpha$ .

(1) نختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا

مركزه النقطة  $O$  ولتكن  $a$  و  $c$

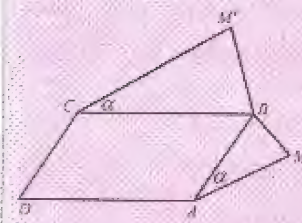
لاختنا  $A$  و  $C$  على الترتيب.

- احسب لاحقة النقطة  $B$ .

(2) بواسطة دورانات غير عن  $Z$  و  $Z'$

لاختنا  $M$  و  $M'$  على التوالي بدلالة:

$\alpha$  و  $c$  ثم بين أن  $Z' = e^{i\alpha} Z$  ماذا تستنتج؟



الحل

(1) لدينا  $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC}$  (علاقة شال)

$$Z_B = Z_A + Z_C = a + c$$

(2) صورة  $M$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\alpha$

$$Z - a = e^{i\alpha} (a + c - a) = e^{i\alpha} c \text{ ومنه } Z = a + e^{i\alpha} \times c$$

صورة  $M'$  بالدوران الذي مركزه النقطة  $C$  وزاويته  $\alpha$

$$Z' - c = e^{i\alpha} (b - c) = e^{i\alpha} (a) \text{ ومنه } Z' = c + e^{i\alpha} \times a$$

$$\text{لدينا } Z' = e^{i\alpha} \times a + (Z - a) e^{i\alpha} = a \times e^{i\alpha} + Z e^{i\alpha} - a \times e^{i\alpha} = Z \times e^{i\alpha}$$

من المساواة  $Z' = e^{i\alpha} Z$  نستنتج أن  $M'$  صورة  $M$  بالدوران الذي مركزه النقطة  $O$  وزاويته  $\alpha$ .

نجد المحل الهندسي

## تطبيق 12

في المستوي للوجه  $ABCD$  مربع مباشر مركزه النقطة  $O$ ، النقطة  $M$  تتغير

على القطعة  $[BC]$  و  $N$  صورة  $M$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

منتصف  $[MN]$ .

نريد إيجاد المحل الهندسي للنقطة  $I$  على  $AM$  تسمح  $[BC]$ .

ليكن  $a$  طول نصف قطر المربع  $ABCD$ ، نختار معلما متعامدا ومتجانسا

$$(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v}) \text{ مباشرا بحيث } \vec{OC} = a \vec{u} \text{ و } \vec{OD} = a \vec{v}$$

نضع  $\vec{BM} = t \vec{BC}$  حيث  $t$  عدد حقيقي من  $[0, 1]$ .

(1) عبر عن  $Z_N$  و  $Z_M$  لاحقتي  $M$  و  $N$  على الترتيب بدلالة  $a$  و  $t$ .

(ب) تحقق أن النقط  $N, D, C$  على استقامة واحدة.

(2) احسب لاحقة النقطة  $I$ .

(ب) استنتج المحل الهندسي للنقطة  $I$ .

الحل

(1) لدينا  $\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM} = -\vec{OD} + t \vec{BC}$

$$\text{ومنه } Z_M = -Z_D + t(Z_C - Z_D)$$

$$= -ai + t(a + ai)$$

$$= -ai + ta + tai = (ta) + i(-a + ta)$$

$$\text{لدينا } Z_N - Z_A = i(Z_M - Z_A)$$

$$\text{ومنه } Z_N = Z_A + i(Z_M - Z_A) = (1-i)Z_A + iZ_M$$

$$= (1-i)(-a) + i(ta + i(-a + ta))$$

$$= -a + ia + ita - (-a + ta)$$

$$= -ta + i(a + ta)$$

$$(ب) \frac{Z_N - Z_D}{Z_C - Z_D} = \frac{-ta + i(a + ta) - ai}{a - ia} = \frac{-ta + ia + ita - ai}{a - ia}$$

$$= \frac{ta(-1 + i)}{-a(-1 + i)} = -t$$

ومنه النقط  $N, D, C$  تقع على استقامة واحدة.

$$(2) \text{ لدينا } Z_I = \frac{Z_M + Z_N}{2}$$

$$Z_I = \frac{Z_M + Z_N}{2} = \frac{ta + i(-a + ta) - ta + i(a + ta)}{2} = ita$$

(ب) بما أن  $a \geq ta \geq 0$  فإن  $I$  تنتمي إلى القطعة  $[OD]$ .

ومنه المحل الهندسي للنقطة  $I$  هي القطعة  $[OD]$ .

الدوران والتحاكي - مجموعة النقط

## تطبيق 13

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر  $(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v})$ .

$M_1$  و  $B$  نقطتان لاختناهما على الترتيب  $i$  و  $(1-i)$   $Z_1 = (\frac{\sqrt{3}-1}{2}) \times (1-i)$

(1) احسب طولية وعمدة  $Z_1$

(2)  $M_2$  نقطة لاختنا  $Z_2$  صورة  $M_1$  بالدوران الذي مركزه النقطة  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .



$$|Z_3 - i| = \left| \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) + i \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) - i \right|$$

$$= \left| \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} i \right| = \sqrt{\left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)^2}$$

$$BM_3 = BM_1 \text{ أي } |Z_3 - i| = |Z_1 - i|$$

وهذا يعني أن  $M_1$  و  $M_3$  تنتميان إلى دائرة مركزها  $B$  ونصف قطرها  $\sqrt{2}$

$$(4) \text{ بما أن } OM' = 1 \text{ فإن } |Z'| = 1$$

$$\text{لكن } |Z - i| = 1 \text{ ومنه } |Z'| = \frac{1}{|Z - i|}$$

وهذا يعني أن النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  تنتمي إلى دائرة مركزها  $B$  ونصف قطرها 1.

#### تطبيق 14

متتالية الأعداد الحقيقية ومتتالية النقط

$(\alpha_n)$  معلما للمستوي المركب، نعتبر متتالية الأعداد الحقيقية

المعرفة بـ  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نسمي  $M_n$  نقطة من الدائرة ( $\gamma$ ) ذات المركز

$O$  ونصف قطرها 1 بحيث الزاوية  $(\vec{u}, \vec{OM})$  قياسها  $\alpha_n$ .

(1) علم النقط  $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ .

(2) نسمي  $Z_n$  لاحقة النقطة  $M_n$ ، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$$\text{لدينا } Z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 5n\frac{\pi}{6}\right)}$$

(3-1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ما يلي:

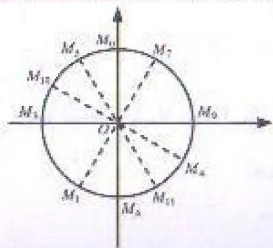
- النقطتان  $M_n$  و  $M_{n+6}$  متقابلتان قطريا.

- النقطتان  $M_n$  و  $M_{n+12}$  منطبقتان.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $Z_{n+4} = e^{-2i\frac{\pi}{3}} \times Z_n$

ثم استنتج أن المسافة  $M_n M_{n+4}$  تساوي  $\sqrt{3}$ .

وأن المثلث  $M_n M_{n+4} M_{n+8}$  متقايس الأضلاع.



$$(1) \quad M_2 = \left[ 1, \frac{\pi}{6} \right], M_1 = \left[ 1, \frac{4\pi}{3} \right], M_0 = \left[ 1, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$M_5 = \left[ 1, \frac{2\pi}{3} \right], M_4 = \left[ 1, \frac{11\pi}{6} \right], M_3 = \left[ 1, \pi \right]$$

$$M_6 = \left[ 1, \frac{7\pi}{6} \right], M_7 = \left[ 1, \frac{\pi}{3} \right], M_8 = \left[ 1, \frac{3\pi}{2} \right]$$

أوجد طوليلة وعمدة  $Z_2$  ثم استنتج أن  $M_2$  تنتمي إلى المستقيم

ذو المعادلة  $y = x$

(3)  $M_3$  نقطة لاحتقتها  $Z_3$  صورة  $M_3$  بالتحاكي الذي مركزه النقطة  $O$

ونسبته  $\sqrt{3} + 2$

$$(1) \text{ تحقق أن } Z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} (1+i)$$

(ب) بين أن النقطتين  $M_1$  و  $M_3$  تنتميان إلى الدائرة التي مركزها  $B$

ونصف قطرها  $\sqrt{2}$

(4) نرفق بكل نقطة  $M$  مختلفة عن  $B$  ذات اللاحقة  $Z$  النقطة  $M'$  ذات

$$\text{اللاحقة } Z' \text{ حيث } Z' = \frac{1}{i-Z}$$

عين ثم ارسم مجموعة النقط  $M$  بحيث النقطة  $M'$  تنتمي إلى دائرة

مركزها  $O$  ونصف قطرها 1.

الحل

$$(1) \quad |Z_1| = \frac{\sqrt{3}-1}{2} |1-i| = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg(Z_1) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \arg(1-i) = 0 - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن } Z_1 = \left[ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$(2) \text{ لدينا } Z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} Z_1 = i Z_1$$

$$|Z_2| = |i| |Z_1| = |Z_1| = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg(Z_2) = \arg(i) + \arg(Z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن } Z_2 = \left[ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4} \right]$$

بما أن  $\arg(Z_2) = \frac{\pi}{4}$  فإن  $M_2$  تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة  $y = x$ .

$$(3) \quad Z_3 = (\sqrt{3}+2) Z_2$$

$$Z_3 = (\sqrt{3}+2) i Z_1 = (\sqrt{3}+2) i \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right) (1-i) = (\sqrt{3}+2) \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) (1+i)$$

$$= \left( \frac{3-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2}{2} \right) (1+i) = \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) (1+i)$$

$$(ب) \quad |Z_1 - i| = \left| \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) (1-i) - i \right| = \left| \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) - i \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \right|$$

$$= \sqrt{\left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4} + \frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2}$$



# مَآرِنٌ وَمَسَائِلٌ

1 - ثلاث نقاط لواحقتها على الترتيب :  $C, B, A$

$$Z_C = -4 - i, Z_B = 5 + 2i, Z_A = 2 + i$$

(1) علم النقط  $C, B, A$  في معلم متعامد ومتجانس.

(2) احسب لاحقتي الشعاعين  $\vec{AC}, \vec{AB}$

ثم استنتج أن النقط  $C, B, A$  على استقامة واحدة.

2 - ثلاث نقاط لواحقتها على الترتيب :  $C', B', A', C, B, A$

$$C' = 5 + i, B' = 4 - i, A' = 3i, C = 4 + i, B = 3 + 3i, A = 2 - i$$

(1) عين لاحقة الشعاع  $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$

(2) احسب لاحقة  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$

(3) بين أن  $G$  مركز ثقل المثلث  $A'B'C'$

3 - ثلاث نقاط لواحقتها على الترتيب :  $C, B, A$

$$C = 2 + \frac{7}{4}i, B = 1 - \frac{5}{4}i, A = \frac{3}{4}i$$

(1) علم النقط  $C, B, A$

(2) أوجد العلاقة بين  $Z_{AC}$  و  $Z_{AB}$

(ب) استنتج أن المثلث  $ABC$  قائم ومتساوي الساقين.

(3) عين لاحقة النقطة  $D$  بحيث يكون الرباعي  $ABDC$  مربعاً.

4 - ثلاث نقاط لواحقتها على الترتيب :  $C_1, B_1, A_1$

$$C_1 = -2 + 3\sqrt{3}i, B_1 = 2 + i\sqrt{3}, A_1 = 4$$

ننشئ المربعات المباشرة  $OC_1C_2C_3, OB_1B_2B_3, OA_1A_2A_3$

(1) بين أن النقط  $C_1, B_1, A_1$  على استقامة واحدة.

(2) بين أن النقط  $C_3, B_3, A_3$  على استقامة واحدة.

(3) بين أن لاحقة النقطة  $C_2$  هي  $O_2 = (1+i)$

(ب) استنتج أن النقط  $C_2, B_2, A_2$  على استقامة واحدة.

$$M_{12} = \left[1, \frac{\pi}{2}\right], M_{11} = \left[1, \frac{5\pi}{3}\right], M_{10} = \left[1, \frac{5\pi}{6}\right], M_9 = [1, 0]$$

$$Z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})} \quad (2)$$

• نبرهن بالراجع على هذه الخاصية :

- من أجل  $n=0$  فإن  $Z_0 = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$  أي  $Z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5 \times 0 \pi}{6})}$

ومنه الخاصية محققة من أجل  $n=0$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  أي  $Z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$

ونبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  أي  $Z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+1)\pi}{6})}$

$$Z_{n+1} = e^{i\alpha_{n+1}} = e^{i(\alpha_n + \frac{5\pi}{6})} = e^{i\alpha_n} \times e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$= e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})} \times e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+1)\pi}{6})}$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

(3)  $M_n$  و  $M_{n+6}$  متقابلتان قطريا هذا معناه أن :

$$Z_{n+6} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+6)\pi}{6})}, Z_{n+6} = -Z_n$$

$$Z_{n+6} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})} \times e^{i5\pi} = -e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$$

إذن  $M_n$  و  $M_{n+6}$  متقابلتان قطريا.

- النقطتان  $M_n$  و  $M_{n+12}$  منطبقتان إذا وفقط إذا كانت

$$Z_{n+12} = Z_n \text{ لأن } Z_{n+12} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+12)\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})} \times e^{i10\pi} = Z_n$$

$$Z_{n+4} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+4)\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})} \times e^{i\frac{10\pi}{3}} \quad (ب)$$

$$Z_{n+4} = Z_n \times e^{i\frac{20\pi}{3}} = Z_n \times e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

$$M_{n+4} M_n = |Z_{n+4} - Z_n|$$

$$|Z_{n+4} - Z_n| = |Z_n| \left| e^{-2i\frac{\pi}{3}} - 1 \right| = \left| e^{-2i\frac{\pi}{3}} - 1 \right| = \sqrt{3}$$

إذن  $M_n M_{n+8} = \sqrt{3}$  و  $M_{n+4} M_{n+8} = \sqrt{3}$  يبقى لنا أن نبين أن  $M_n M_{n+8} = \sqrt{3}$

$$M_{n+8} M_n = |Z_{n+8} - Z_n| = \left| e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+8)\pi}{6})} - e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})} \right|$$

$$= \left| e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})} \left( e^{i\frac{20\pi}{3}} - 1 \right) \right| = \sqrt{3}$$

ومنه المثلث  $M_n M_{n+4} M_{n+8}$  متقايس الأضلاع.



5

- المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

(1-1) اعط كتابة جبرية للعدد المركب الذي طويلته 2 وعمدته  $\frac{\pi}{2}$ .

(ب) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $iz - 2 = 4i - z$ .

(2) نرمز بـ  $I, A, B$  للنقط ذات اللواحق  $Z_I = 1, Z_A = 2i, Z_B = 3+i$

(ا) علم النقط  $A, B, I$

(ب) عين  $Z_C$  لاحقة النقطة  $C$  صورة  $A$  بالتناظر المركزي الذي مركزه  $I$

(ج) اكتب على الشكل الجبري العدد  $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$  ثم استنتج طويلته وعمدته.

(د) نقطة لاحقتها  $Z_D$  بحيث  $Z_D - Z_C = Z_A - Z_B$  بين ان  $ABCD$  مربع.

(3) من أجل كل نقطة  $M$  من المستوي نعتبر الشعاع  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}$

(ا) عبر عن هذا الشعاع بدلالة الشعاع  $\vec{MI}$

(ب) بين ان النقطة  $K$  التي تحقق  $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD} = 2\vec{AB}$  هي منتصف  $[AD]$ .

(ج) عين  $(\gamma)$  مجموعة النقط  $M$  بحيث  $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = \|2\vec{AB}\|$  ثم ارسمها.

6

-  $A, B, C$  ثلاث نقط لواحقها على الترتيب  $a = 3, b = 5-4i, c = 5+i$

(1) اكتب العدد المركب  $\frac{b-a}{c-a}$  على الشكل الجبري.

(2) استنتج عبارة  $Z_{AB}$  بدلالة  $Z_{AC}$  ثم بين ان  $(AB)$  و  $(AC)$  متعامدان.

7

-  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين غير معدومين و  $x$  عدد حقيقي،  $\theta$  و  $r$  هما على

التوالي طويلا وعمدة العدد المركب  $a+ib$

(1) بين ان  $\cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta)$

(2) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$

8

-  $A, B, C, D$  أربع نقط لواحقها على الترتيب،

$a = 1+2i, b = 1-2i, c = 2+3i, d = 6-3i$

(1) اكتب العددين المركبين  $\frac{c-b}{d-b}$  و  $\frac{c-a}{d-a}$  على الشكلين الجبري والمثلثي

(2) استنتج من السؤال (1) طبيعة المثلثين  $ACD$  و  $BCD$

(3) بين ان النقط  $A, B, C, D$  تنتمي إلى نفس الدائرة والتي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

9

- نرفق بكل عدد مركب  $Z \neq i$  العدد المركب  $Z'$  المعروف بـ  $Z' = \frac{Z-1+2i}{Z-i}$

(1) احسب  $Z'$  من أجل القيمتين  $1$  و  $1-i$  للعدد  $Z$

(2) نضع  $Z = x+iy$  و  $Z' = x'+iy'$  حيث  $x, y, x', y'$  أعداد حقيقية

(ا) اكتب  $x'$  و  $y'$  بدلالة  $x$  و  $y$

(ب) عين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  بحيث  $Z'$  حقيقي.

(ج) عين  $(F)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  بحيث  $Z'$  تخيلي صرف

(د) مثل المجموعتين  $(E)$  و  $(F)$  في المستوي المركب.

(3)  $A$  و  $B$  نقطتان لاحقتاهما على التوالي  $1-2i$  و  $i$  باعتبار الشعاعين الذين

لاحقتيهما على التوالي  $Z-1+2i$  و  $Z-i$  عبر عن عمدة  $Z'$ .

10

(1) عين ثم ارسم في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط  $M$  التي لاحقتها  $Z$  تحقق:

$$(ا) |Z-2| = |Z-(1-i)|$$

$$(ب) |Z-1-i| = |Z+2-3i|$$

$$(ج) |Z-3-i| = \sqrt{3}$$

$$(د) |Z+2+i| \leq 2$$

(2) عين ثم ارسم في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط  $M$  التي لاحقتها  $Z$  تحقق:

$$(ا) \arg(Z+1) = \frac{\pi}{3} \quad (ب) \arg(Z-i) = \frac{\pi}{2}$$

$$(ج) \arg(Z+1) = \pi \quad (د) \arg(Z+i) = \frac{\pi}{3}$$

11

- عين طبيعة التحويل الذي يرفق بكل نقطة  $M$  لاحقتها  $Z$  النقطة  $M'$  لاحقتها  $Z'$

في كل حالة من الحالات التالية:

$$(ا) Z' = Z + 2 - i \quad (ب) Z' = -\bar{Z}$$

$$(ج) Z' - 2 + i = Z - i + 2 \quad (د) Z' - 1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(Z-1)$$

$$(هـ) Z' = 6Z \quad (و) Z' = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)Z$$

12

(1)  $I$  هو انسحاب يحول  $A(2-i)$  إلى  $B(4+2i)$

(ا) ما هي لاحقة شعاع الانسحاب  $I$  ؟

(ب) ما هي الكتابة المركبة لـ  $I$  ؟

(2)  $h$  تحاكي مركزه النقطة  $O$  يحول  $C(-2i)$  إلى  $D(-5+3i)$

(ا) ما هي نسبة التحاكي لـ  $h$  ؟

(ب) ما هي الكتابة المركبة لـ  $h$  ؟



نختار العلم المتعامد المتجانس المباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  بحيث  $\vec{OA} = a\vec{u}$  ،  $\vec{OM} = m\vec{v}$  ،

(1) ما هي اللواحق  $Z_A, Z_M, Z_C, Z_I$  للنقط  $A, M, C, I$  على الترتيب ؟

(ب) عين لاحقة النقطة  $B$

(2) اعر عن  $\theta = \frac{Z_A - Z_I}{Z_B}$  بدلالة  $a, c, m$  .

(ب) بين ان الأعداد الحقيقية الموجبة  $a, c, m$  تحقق  $ac = m^2$

(ج) استنتج أن  $\theta$  تخيلي صرف.

(د) ماذا تستنتج حول  $(IA)$  و  $(OB)$  ؟

13 -  $A$  و  $B$  نقطتان حيث لاحتقتهما  $Z_A = 2 - i$  ،  $Z_B = 1 - 3i$

(1) عين لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $B$  بالتناظر الذي مركزه  $A$

(2) عين لاحقة النقطة  $D$  صورة  $C$  بالدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$

(3) عين لاحقة النقطة  $E$  صورة  $D$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{CA}$

(4) عين لواحق النقط  $A', C', D', E'$  صور النقط  $A, C, D, E$  بالتحاكي

الذي مركزه  $B'$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  و ما هي طبيعة الرباعي  $A'C'D'E'$  ؟

14 -  $A, B, C$  ثلاث نقط لواحقتها على الترتيب  $Z_A = 2 + i$  ،  $Z_B = -1 + 2i$  ،  $Z_C = 1 - 2i$

(1-1) احسب  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$  واعط شكله الجبري.

(ب) استنتج ان المثلث  $ABC$  قائم ومتساوي الساقين

(2) عين لاحقة النقطة  $D$  بحيث  $ABCD$  متوازي أضلاع.

(3) لتكن  $E$  صورة  $D$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{CA}$

عين لاحقة  $E$  ثم عين طبيعة الرباعي  $ACDE$  .

15 -  $A$  و  $B$  نقطتان حيث أن لاحتقتهما على التوالي  $Z_A = 1$  و  $Z_B = 2$  و  $\theta$  عدد حقيقي

من  $[0, \pi]$  ولتكن  $M$  نقطة لاحتقتها  $Z = 1 + e^{i\theta}$

(1) ما هي  $(\gamma)$  مجموعة النقط  $M$  لـ  $\theta$  يسمح  $[0, \pi]$  ؟

(2) لتكن  $M'$  صورة النقطة  $M$  بالدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $2\theta$

ترمز بـ  $Z'$  لاحقة  $M'$  ،

بين ان  $Z' = \bar{Z}$  ثم بين ان  $M'$  تنتمي إلى الدائرة  $(C_1)$  التي مركزها النقطة  $A$  ونصف قطرها 1 .

(3) في كل ما يلي نضع  $\theta = \frac{\pi}{3}$  ونسمي  $r$  الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{-2\theta}{3}$

بحيث  $r(A) = A'$

(أ) عين  $(C_2)$  صورة  $(C_1)$  بالدوران  $r$  ثم مثل  $A, B, C, M, (C_1), (C_2)$  و  $M'$

(ب) بين ان المثلث  $AMO$  متقايس الأضلاع.

(ج) بين ان  $(C_1), (C_2)$  تتقاطعان عند  $O$  و  $M'$

(د) لتكن النقطة  $P$  نظيرة  $M$  بالنسبة إلى  $A$  بين ان  $M'$  هي منتصف  $[AP]$

16 - في مستوي موجه  $ABC$  مثلث متقايس الساقين مباشر رأسه  $A$  منتصف  $[BC]$

و  $O$  مسقطها العمودي على المستقيم  $(AC)$  ،  $I$  منتصف القطعة  $[OM]$

الهدف من هذا التمرين هو الإثبات بواسطة الأعداد المركبة أن :

المستقيمين  $(IA)$  و  $(OB)$  متعامدان.

نضع  $m = OM$  ،  $c = OC$  ،  $a = OA$